Simulación Matemática de una Epidemia

Jorge A. Bravo Cabrejos
Instituto de Investigación de Física, Facultad de Ciencias Físicas, UNMSM
Jbravoc@unmsm.edu.pe

Resumen

Se presenta un modelo matemático que simula la evolución de casos como consecuencia del contagio con el coronavirus tomando como referencia los informes diarios que emite el Ministerio de Salud para todo el territorio del Perú. En este trabajo se ha puesto énfasis en la zona metropolitana de Lima-Callao. Para este fin se utilizan cuatro parámetros probabilísticos cuyos valores se escogen de manera que el modelo reproduzca los números de casos reportados. Uno de ellos cuantifica la probabilidad de que una persona se contagie por cada día que pasa, el segundo la probabilidad de ser dado de alta por cada día que ha transcurrido desde el día del contagio. Los dos otros parámetros cuantifican las fracciones de pacientes que superan el mal y los que fallecen. En este modelamiento se considera dos intervalos de tiempo: un intervalo inicial de 75 días en que la tasa de contagio es acelerada y un intervalo posterior que se inicia con la tasa final del primer intervalo. El ajuste de estos parámetros da como resultado que el número promedio de días para recuperarse del mal desde el día del contagio es de 27 días. Otro resultado es que el número máximo de pacientes activos llegará a alrededor de 115 mil pacientes dentro de siete meses, una fracción de los cuales necesitará hospitalización. La tasa de defunciones considerada es de 8%.

I. Introducción.

Se presenta un modelo matemático que simula la evolución de casos como consecuencia del contagio con el coronavirus tomando como referencia la información estadística que emite diariamente el Ministerio de Salud. Es un modelo aproximado que puede ser útil para describir la evolución temprana de la epidemia en la zona metropolitana de Lima-Callao.

II. Modelo matemático.

Para este fin se definen las siguientes variables que dependen del tiempo:

$N_1(t)$= Población no contagiada; cumple la condición inicial de $N_1(0) = N_{10}$

$N_2(t)$= Total de población contagiada; cumple la condición inicial de $N_2(0) = 0$

$N_3(t)$= Total de casos activos; cumple la condición inicial de $N_3(0) = 0$

$N_4(t)$= Total de pacientes recuperados; cumple la condición inicial de $N_4(0) = 0$

$N_5(t)$= Total de pacientes fallecidos; cumple la condición inicial de $N_5(0) = 0$

Se ha adoptado el intervalo de un día como la unidad de tiempo.

Estas variables cumplen la siguiente condición:

$$N_3 + N_4 + N_5 = N_2 \tag{1}$$

Además, definimos los siguientes parámetros utilizados en el modelo:

p_1 = probabilidad de contagio personal por cada día que pasa.

p_2 = probabilidad que un paciente sea dado de alta o baja durante un día.

a_4= probabilidad de ser dado de alta o recuperarse = 0.92.

a_5= probabilidad de ser dado de baja o fallecer a causa del mal = 0.08.

Se cumple la condición:

$$a_4 + a_5 = 1 \tag{2}$$

Estos parámetros pueden variar según la zona que se desee modelar. Para esta aplicación se usarán los datos estadísticos para la zona de Lima-Callao.

Las variables arriba definidas satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, con sus respectivas condiciones iniciales:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -p_1 N_1, \text{ con } N_1(0) = N_{10}$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = p_1 N_1, \text{ con } N_2(0) = 0$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = p_1 N_1 - p_2 N_3, \text{ con } N_3(0) = 0.$$

$$\frac{dN_4(t)}{dt} = a_4 p_2 N_3, \text{ con } N_4(0) = 0.$$

$$\frac{dN_5(t)}{dt} = a_5 p_2 N_3, \text{ con } N_5(0) = 0.. \qquad \text{(3 a, b, c, d, e)}$$

En el caso que todos los parámetros estadísticos sean constantes en un cierto intervalo de tiempo, al inicio del cual las variables toman valores N_{i0}, con i=1 al 5, se obtiene la solución general siguiente:

$$N_1(t) = N_{10} e^{-p_1 t}$$

$$N_2(t) = N_{10}(1 - e^{-p_1 t})$$

$$N_3(\text{t}) = N_{30} e^{p_2 t} + \left(\frac{p_1 N_{10}}{p_2 - p_1}\right)(e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t})$$

$$N_4(t) = a_4(N_{40} + N_{30}(1 - e^{p_2 t}) + N_{10}\left(1 - \frac{p_2 e^{-p_1 t} - p_1 e^{-p_2 t}}{p_2 - p_1}\right)$$

$$N_5(t) = a_5 N_4(t)/a_4 \qquad \text{(4 a, b, c, d, e)}$$

Teniendo en cuenta el aumento acelerado de la tasa de contagios al inicio del proceso, se plantea el uso de dos intervalos de tiempo. Un primer intervalo abarca los primeros 75 días del proceso. De manera que para los parámetros p_1 y p_2 tenemos la siguiente dependencia en el tiempo:

$$P_1(t) = (1{,}25E\text{-}10)\ t^{3.41}/d,\ 0< t < 75\ d.$$

$$= 0.00031/d,\ t > 75\ d.$$

$$P_2(t) = 0.037/d,\ \text{para todo } t.$$

III. Resultados:

Teniendo en cuenta la dependencia en tiempo del parámetro p_1, para obtener la solución del sistema de ecuaciones acopladas (3) hay que recurrir a métodos numéricos. Para este cálculo se considera que la población inicial de Lima Metropolitana es N_{10} = 12 millones de habitantes sanos. Se considera que el proceso de contagio se inicia el primer día de marzo del presente año.

La Figura 1. muestra los resultados para un periodo inicial de 75 días. La Figura 2. muestra los resultados para un periodo inicial de 2000 días. Un resultado muy propio de este modelo, según el valor de p_2 es que requiere que el tiempo promedio entre el día del contagio y la fecha de dada de alta es alrededor de 27 días. La tasa de defunción utilizada es de 8%.

IV. Discusión y Conclusiones.

Los resultados obtenidos se ajustan bastante bien a los datos estadísticos publicados hasta la fecha, excepto en los primeros días en que las estadísticas publicadas probablemente no hayan sido muy precisas por la novedad del proceso. Este modelo considera que el proceso de contagios se inició el primer día de marzo. La fecha en que se dio a conocer el primer caso fue en los primeros días de marzo pero éste había ocurrido en el extranjero a fines del mes de febrero.

Un resultado muy útil es el hecho que el modelo pronostica, de acuerdo a la Ec. 3c haciendo que $\frac{dN_3}{dx} = 0$, que equivale a la condición de equilibrio secular del proceso, que el número máximo de pacientes en tratamiento llegaría a alrededor de 115 mil como máximo a los seis meses del proceso, una fracción de los cuales requerirá hospitalización.

Este modelo no toma en cuenta los detalles del mecanismo de contagio pero puede ser útil para pronosticar ciertas características de su evolución. Este modelo es un modelo lineal. El proceso de contagio requiere una descripción no lineal, que conllevaría a describir una especie de explosión del número de contagiados. Dada la magnitud del problema es todavía temprano para ver indicios de esta explosión. Es posible que las medidas de aislamiento social que se han aplicado hayan atenuado la evolución de este proceso.

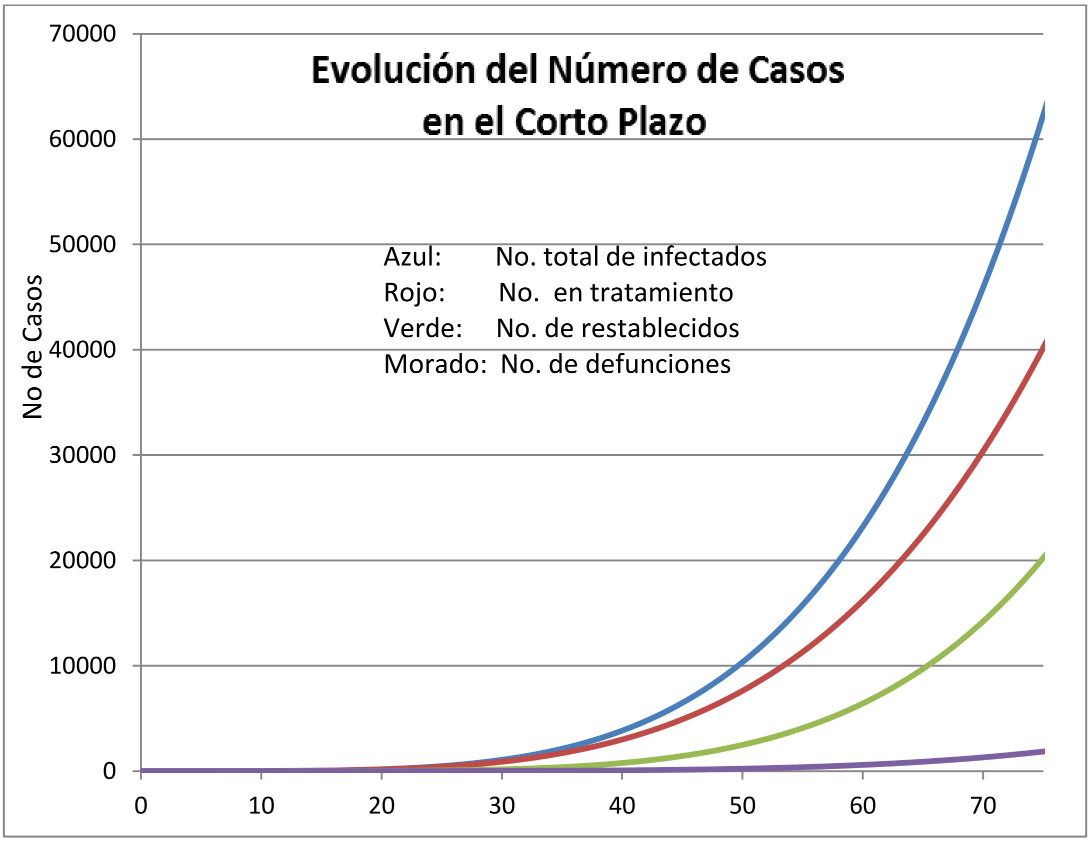

Figura 1. Evolución del número de casos durante un periodo inicial de 70 días.

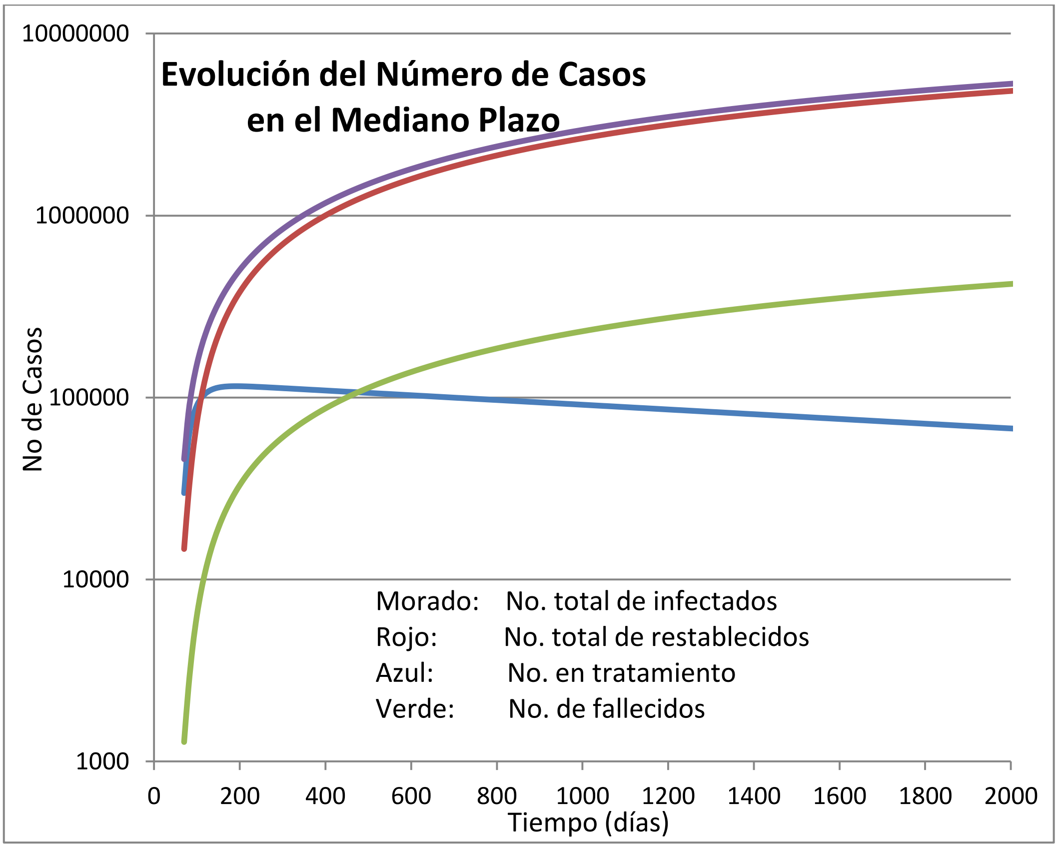

Figura 2. Evolución del número de casos durante un periodo inicial de 2000 días.

De mantener este modelo su validez a mediano plazo, podemos concluir que será necesario el uso de un tratamiento médico adecuado y un programa masivo de vacunas para aliviar el sufrimiento que está causando este mal.

V. Referencias.

1. Comunicados diarios del Ministerio de Salud.

2. Sokolnikoff, I. S y R. W. Redheffer. 1958. Mathematics of Physics and Engineering. Mc Graw Hill Book Co.

Lima, mayo de 2020